УДК 621.3.011.22: 621.3.014.14: 519.65 DOI: https://doi.org/10.15407/publishing2021.59.0011

ПАРАМЕТРИ НЕВ'ЯЗКИ АПРОКСИМАЦІЙ ДИСКРЕТНО ЗАДАНИХ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ АНАЛІТИЧНИМИ ФУНКЦІЯМИ ТА КРИТЕРІЇ ПОШУКУ ОПТИМАЛЬНИХ ЗНАЧЕНЬ ЇХНІХ КОЕФІЦІЄНТІВ

Н.А. Шидловська* , чл.-кор. НАН України, **С.М. Захарченко****, докт. техн. наук,
І.Л. Мазуренко***, канд. техн. наук
Інститут електродинаміки НАН України,
просп. Перемоги, 56, Київ, 03057, Україна
e-mail: snzakhar@ukr.net

Наведено універсальні параметри нев'язки апроксимацій дискретно заданих залежностей аналітичними функціями і критерії пошуку оптимальних значень їхніх коефіцієнтів та аналіз особливостей їхнього застосування. Запропоновано параметри нев'язки апроксимацій, які не залежать від діапазонів змін значень функцій та від кількості точок дискретно заданої залежності і можуть бути придатні для порівняння якості апроксимацій будь-яких залежностей будь-якими функціями. Виконано апроксимації дискретно заданої залежності математичного сподівання еквівалентного електричного опору шару гранул алюмінію під час їхнього іскроерозійного диспергування у воді від миттєвих значень розрядного струму. В якості апроксимуючих функцій вибрано степеневу з показником степеня –1 та функцію з експоненціальною складовою. За низкою критеріїв найменшої похибки апроксимації знайдено оптимальні значення коефіцієнтів обох апроксимуючих функцій. Показано, в яких випадках доцільно використовувати об'єднані критерії пошуку оптимальних значень коефіцієнтів апроксимуючих функцій, а в яких достатньо простих однокомпонентних критеріїв. Бібл. 27, рис. 2, табл. 2.
Ключові слова: електричний опір, розрядний струм, іскроерозійне диспергування, апроксимація, нев'язка, критерії пошуку.

Вступ. Важливим етапом побудови математичних моделей отриманих у ході експериментів дискретно заданих залежностей є їхня апроксимація аналітичними функціями. При підборі формули апроксимуючої функції потрібно враховувати вигляд її графіка, узгодженість з фізичною природою отриманої у ході експериментів залежності, області визначення та значень функції, наявність особливих точок, складність її інтегрування і диференціювання та ін. [1]. Важливим фактором, що впливає на точність апроксимації, є підбір оптимальних значень коефіцієнтів аналітичної функції, які забезпечують мінімальні розходження з дискретно заданими вхідними даними. Вже понад два сторіччя для знаходження їхніх оптимальних з точки зору мінімально можливих розходжень з вхідними даними значень використовується метод найменших квадратів (МНК) [2, 3], а пізніше – його різновиди: зважений МНК, нелінійний МНК та узагальнений МНК [4].

Але критерій мінімального значення суми квадратів різниць (СКР) отриманої в ході експериментів дискретно заданої величини y_e та значень апроксимуючої її аналітичної функції y_a, який використовується у МНК, при одних і тих же значеннях аргументів не завжди дозволяє легко і з малою кількістю ітерацій знайти оптимальні з точки зору забезпечення найкращого наближення значення коефіцієнтів цієї функції [1]. Крім того, СКР не є зручним універсальним критерієм якості (тобто ступеня точності) апроксимації, оскільки відображає не відносну величину, а квадрат різниці апроксимованих і дискретно заданих значень і залежить від кількості дискретних точок залежності *N*. Середнє значення СКР теоретично не залежить від кількості дискретних точок залежності, але все одно не може бути універсальним критерієм якості апроксимації, оскільки не є відносною величиною [1]. Корінь із середнього значення СКР характеризується однаковою розмірністю з експериментальними даними, але він знову залежить від кількості дискретних точок *N*. Відношення кореня середнього значення СКР до математичного сподівання дискретно заданої величини $M[y_e]$ дає змогу перейти до відносних критеріїв, що наближає його до універсальних критеріїв, але це відношення залежить від кількості дискретних точок, тому не може вважатися універсальним критерієм [1].

ORCID ID: *https://orcid.org/0000-0002-9907-7416, **https://orcid.org/0000-0002-8597-8045, ***https://orcid.org/0000-0002-0146-7396

Актуальною і важливою задачею подальшого розвитку методів апроксимації результатів вимірювань в напрямках підвищення їх точності та зниження трудомісткості є розроблення нових ефективних критеріїв пошуку оптимальних значень коефіцієнтів апроксимуючих функцій, а також універсальних параметрів нев'язки, придатних для порівняння похибок апроксимацій незалежно від кількості дискретно заданих результатів вимірювань, властивостей аналітичних функцій тощо.

Метою роботи є синтез ефективних універсальних параметрів нев'язки апроксимацій дискретно заданих залежностей аналітичними функціями і критеріїв пошуку оптимальних з точки зору мінімально можливих розходжень з вхідними даними значень їхніх коефіцієнтів та аналіз особливостей їхнього застосування.

Синтез та аналіз параметрів і критеріїв. В якості параметра нев'язки апроксимації на основі СКР відомо використання відносного стандартного відхилення оцінки експериментальних і наближених значень [5, 6], яке є відношенням середнього квадратичного відхилення *N* дискретно заданих значень від наближених значень залежності $\sigma[y_e, y_a]$ до математичного сподівання дискретно заданої величини:

$$\upsilon = 100\% \cdot \sigma[y_e, y_a]/M[y_e] = \sqrt{N \cdot \sum_{j=1}^{N}\left(y_{ej} - y_{aj}\right)^2} \bigg/ \sum_{j=1}^{N} y_{ej} \,. \tag{1}$$

Критерієм пошуку оптимальних значень коефіцієнтів апроксимуючої функції у цьому випадку може бути мінімальне (у ідеальному випадку нульове) значення (1). Хоча параметр нев'язки апроксимації (1) є безрозмірним, він не може бути універсальним, тобто використовуватись для порівняння якості апроксимації будь-яких дискретно заданих залежностей будь-якими аналітичними функціями, оскільки його значення залежать від кількості дискретно заданих точок *N* отриманої у ході експериментів залежності. Цей недолік легко виправити, дещо змінивши формулу (1):

$$\upsilon_1 = 100\% \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{N}\left(y_{ej} - y_{aj}\right)^2} \bigg/ \sum_{j=1}^{N} y_{ej} \,. \tag{2}$$

Параметр (2) є універсальним: він безрозмірний і не залежить від кількості точок дискретно заданої залежності (кількості вимірювань). Кількість дискретних точок при розрахунку середньої суми квадратів відхилень скорочується з кількістю точок при розрахунку математичного сподівання дискретно заданої величини. Таким чином, параметр (2) є приведеним до кількості вимірювань відносним стандартним відхиленням оцінки експериментальних і наближених значень. За допомогою (2) можна порівнювати якість апроксимації будь-яких дискретно заданих залежностей будь-якої кількості пар значень, незалежно від розміру областей визначення та значень функції.

Спрямувавши значення υ_1 в (2) до нуля, його можна використовувати як критерій пошуку оптимальних значень коефіцієнтів апроксимуючої функції. Але при знаходженні за критерієм мінімуму виразу (2) оптимальних значень коефіцієнтів апроксимуючих функцій, слід пам'ятати, що він більш чутливий до розходжень результатів апроксимації з експериментальними даними у дискретних точках з великими значеннями, ніж до аналогічних показників у точках з малими значеннями. Тому знайдені за критерієм мінімального значення (2) коефіцієнти апроксимуючої функції забезпечуватимуть більш якісну апроксимацію в області великих значень функції, ніж в області її малих значень.

Зменшити вплив цієї особливості критерію мінімуму (2) на якість апроксимації можна, використавши інший критерій – мінімального середнього значення модулів відносних відхилень дискретних і апроксимованих значень [6]:

$$|\delta_1| = \frac{100\%}{N} \sum_{j=1}^{N} \left|\left(y_{ej} - y_{aj}\right)/y_{ej}\right| . \tag{3}$$

Універсальний параметр нев'язки (3) дає інформацію про середню відносну похибку апроксимації у всьому діапазоні зміни значень функції. Якщо мінімальне значення (3) використовувати як критерій пошуку оптимальних значень коефіцієнтів апроксимуючих функцій, то визначені у такий спосіб коефіцієнти функції можуть забезпечувати більш високу якість апроксимації в областях малих значень дискретно заданих залежностей у порівнянні з функціями, коефіцієнти яких знайдено за критерієм мінімуму (2).

Наступним логічним кроком підвищення якості апроксимації в усьому діапазоні змін значень функцій є розроблення об'єднаного параметра нев'язки та розроблення на його основі критерію пошуку оптимальних значень коефіцієнтів апроксимуючих функцій. Одним з таких критеріїв може бути мінімальне значення середньозваженої суми (2) і (3) з ваговими коефіцієнтами b_1 та b_2 [7] відповідно:

$$\beta_{2b} = \left(b_1 \cdot \upsilon_1 + b_2 \cdot |\delta_1|\right) / \left(b_1 + b_2\right). \tag{4}$$

Оскільки параметри нев'язки, що обчислюються за (2) і (3), є безрозмірними (пронормованими), то у більшості випадків їх можна вважати однаково важливими. У такому разі немає потреби у введенні вагових коефіцієнтів, і вираз (4) можна спростити:

$$\beta_2 = \left(\upsilon_1 + |\delta_1|\right) / 2. \tag{5}$$

Параметр (5) є універсальним показником якості апроксимації. Ще одним параметром нев'язки апроксимації є систематична адитивна (додатна або від'ємна) постійна складова відхилень апроксимованих значень від дискретно заданих. Вона може виникнути у разі, якщо апроксимуюча функція суттєво відхиляється вище або нижче від тренду дискретно заданої залежності. Параметри (1) – (5) не відображають систематичну адитивну постійну складову нев'язки апроксимації у явному вигляді. Одним з універсальних параметрів нев'язки апроксимації, який відображає цю складову, є середнє значення відносних відхилень дискретних і апроксимованих значень [1]:

$$\delta = \frac{100\%}{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\left(y_{ej} - y_{aj} \right) / y_{ej} \right). \tag{6}$$

Хоча параметр (6) є універсальним і відображає середнє значення відносних відхилень дискретних і апроксимованих значень для будь-яких дискретно заданих залежностей та їхніх апроксимацій, його мінімальне значення само по собі не може бути ефективним критерієм пошуку оптимальних значень коефіцієнтів апроксимуючих функцій. Існує велика імовірність того, що навіть за рівності нулю виразу (6) майже в усіх точках дискретно заданої залежності будуть великі її відхилення від значень апроксимуючої функції. Такий випадок майже зі стовідсотковою імовірністю матиме місце при апроксимації будь-якої залежності константою. Але використання складової (6) у складі об'єднаних параметрів нев'язки та критеріїв пошуку оптимальних значень коефіцієнтів апроксимуючих функцій на їхній основі може забезпечити суттєве зменшення систематичної адитивної постійної складової відхилень апроксимованих значень від дискретно заданих. Одним із таких об'єднаних параметрів нев'язки з ваговими коефіцієнтами складових b_1, b_2 та b_3 може бути наступний:

$$\beta_{3b} = \left(b_1 \cdot \upsilon_1 + b_2 \cdot |\delta_1| + b_3 \cdot |\delta|\right) / \left(b_1 + b_2 + b_3\right). \tag{7}$$

Якщо всі складові (7) однаково важливі, то так само, як і у попередньому випадку, від вагових коефіцієнтів можна відмовитися. Тоді (7) спроститься до вигляду [6]:

$$\beta_3 = \left(\upsilon_1 + |\delta_1| + |\delta|\right) / 3. \tag{8}$$

Хоча критерій мінімуму (8) є дуже перспективним для знаходження оптимальних значень коефіцієнтів апроксимуючих функцій, сам по собі вираз (8) важко назвати достатньо універсальним і придатним для всебічного аналізу параметром нев'язки апроксимації. З цією задачею, на наш погляд, найкраще справляється вираз (3). У разі, якщо потрібен додатковий аналіз, можна рекомендувати залучення іще і параметрів (2) та (6).

Практичні аспекти використання параметрів нев'язки апроксимацій і критеріїв пошуку оптимальних значень коефіцієнтів апроксимуючих функцій. Розглянемо випадок апроксимації отриманої в результаті прямих експериментів дискретної залежності математичного сподівання еквівалентного електричного опору шару гранул алюмінію у воді $M[R]_e$ в процесі їхнього іскроерозійного диспергування [8] від миттєвих значень розрядного струму i на задніх фронтах його імпульсів [9], яка на рис. 1 та 2 представлена трикутниками з вершинами, зорієнтованими угору. Хід і умови експериментів детально описані у [9], тому тут на них зосереджуватись не будемо.

Іскроерозійне диспергування шарів гранул металів і сплавів дуже важливий процес, який добре зарекомендував себе як один з найтехнологічніших та найекологічніших при високопродуктивному отриманні їхніх порошків зі спеціальними властивостями [10–15]. При іскроерозійному диспергуванні у воді гранул утворюючих коагулянт металів (*Fe, Al*) відбувається знезараження [16] та очищення [17, 18] водних скидів, а гранул біологічно активних металів (*Ag, Cu, Zn, Fe, Mo, Co, Mg, Mn*) – виробництво біоцидних і біогенних гідрозолів [19] для подальшого використання у рослинництві [20] і тваринництві [21].

Еквівалентний електричний опір шарів металевих гранул в процесі їхнього електроіскрового диспергування залежить від багатьох чинників, які можуть бути охарактеризовані як детермінованими, так і стохастичними величинами [22]. Зокрема, від розрядного струму [23, 24], його стохастичних флуктуацій [9, 25], часу протікання [26] та ін.

Для апроксимації залежності еквівалентного електричного опору шарів металевих гранул від миттєвих значень розрядного струму найбільш широко використовуються функції на основі експоненціальної [24, 27] та на основі степеневої функції з показником степеня – 1 [1, 6, 23]. Тому розглянемо їх для апроксимації залежності математичного сподівання еквівалентного електричного опору шару гранул алюмінію від миттєвих значень розрядного струму в ньому на задніх фронтах струмових імпульсів. Запропонований у [27] вираз для нашого випадку перепишемо у вигляді:

$$M\left[R\right]_a = a_0 + a_1 \exp\left(-\left|i\right| / a_2\right), \tag{9}$$

де a_0 – коефіцієнт функції, який визначає мінімальну постійну складову активного опору у випадку, коли значення струму у навантаженні прямує до нескінченності [1], Ом; a_1 – коефіцієнт функції, який визначає різницю між максимальним (при мінімальному значенні струму з діапазону, що розглядається) значенням опору навантаження і його мінімальною постійною складовою a_0, Ом; a_2 – значення струму, при зміні на яке опір навантаження змінюєтсься в *e* разів, А. Індекс *a* в усіх виразах означає апроксимацію аналітичною функцією.

Отримані за критеріями мінімуму (2), (3), (5) та (8) значення коефіцієнтів у (9) та значення параметрів нев'язки апроксимацій (2), (3), (5), (6), (8) функції (9) наведено в табл. 1. Для знаходження значень коефіцієнтів апроксимуючої функції використовувався модуль «Пошук рішення» пакету Excel 2003 з відповідними обмеженнями їхніх значень за методикою, описаною у [6].

З аналізу наведених у табл. 1 даних випливає наступне:

1) значення коефіцієнтів у виразі (9), знайдені за критеріями мінімуму (3) та мінімуму (5), співпали. Тобто для даного конкретного випадку критерій мінімуму об'єднаного параметра β_2 (5) виявився надлишковим. У даному випадку складова $\left|\delta_1\right|$ у виразі (5) виявилась більш впливовою, ніж його складова υ_1;

2) систематичну адитивну похибку апроксимації враховував лише критерій мінімуму об'єднаного параметра β_3 (8), тому мінімальне значення параметра нев'язки δ (приблизно $8 \cdot 10^{-8}$ %) забезпечувало використання саме цього критерію. Але використання інших критеріїв, крім одного, також призводило до гарних результатів за цим параметром: його значення за двома іншими критеріями не перевищувало 1,55 %, а лише за критерієм $\min \upsilon_1$ склало приблизно $-10{,}87\%$, що занадто багато. У даному конкретному випадку при використанні критерію $\min \upsilon_1$ додаткова перевірка за параметром нев'язки δ виявилась доречною Якщо апроксимуюча функція добре описує дискретну залежність, використання критерію мінімуму об'єднаного параметра β_3 із складовою δ може виявитись надлишковим;

3) значення коефіцієнтів у (9), знайдені за критеріями мінімуму $\left|\delta_1\right|$ та мінімуму β_3, відрізняються несуттєво, набагато менше, ніж знайдені за критеріями мінімуму $\left|\delta_1\right|$ та міні-

муму υ_1. Тобто у даному конкретному випадку складова $|\delta_1|$ об'єднаних критеріїв β_2 і β_3 є домінуючою.

На рис. 1 представлено графіки апроксимуючої функції (9), коефіцієнти якої знайдено за наступними критеріями: мінімуму $|\delta_1|$ (3) – суцільною лінією (синього кольору в електронній версії статті), мінімуму υ_1 (2) – точками (червоного кольору) і мінімуму β_3 (8) – пунктирною лінією (зеленого кольору). Графіки апроксимуючої функції, коефіцієнти якої знайдено за критеріями мінімуму $|\delta_1|$ та мінімуму β_3, майже співпадають, що узгоджується з наведеним вище аналізом даних табл. 1. Графік функції (9), коефіцієнти якої знайдено за критерієм мінімуму υ_1, дещо гірше за попередні графіки узгоджується з дискретними даними в області малих значень функції, що було передбачено вище.

З урахуванням фізики процесів, які протікають при іскроерозійному диспергуванні занурених у робочу рідину шарів металевих гранул, детально описаних у [1], було запропоновано електричну схему заміщення такого навантаження. Схема складається з двох паралельних гілок. Перша гілка містить послідовно з'єднані активний постійний опір, який моделює відповідні складові опорів металевих гранул та плазмових каналів, а також джерело проти-ЕРС, що моделює падіння напруги на нелінійній складовій опору плазмових каналів. Другою гілкою є лінеаризований активний опір робочої рідини [1]. За цією схемою побудовано спрощену математичну модель, що описує залежність її еквівалентного електричного опору від струму:

$$M[R]_a = a_2\left(a_0 + a_1|i|^{-1}\right)\Big/\left(a_0 + a_1|i|^{-1} + a_2\right), \tag{10}$$

де a_0 – коефіцієнт функції, який визначає мінімальну постійну складову активного опору у гілці схеми заміщення з джерелом проти-ЕРС [1], Ом; a_1 – коефіцієнт функції, який визначає величину проти-ЕРС у схемі заміщення [1], В; a_2 – коефіцієнт, який є лінеаризованим опором робочої рідини у схемі заміщення [1], Ом.

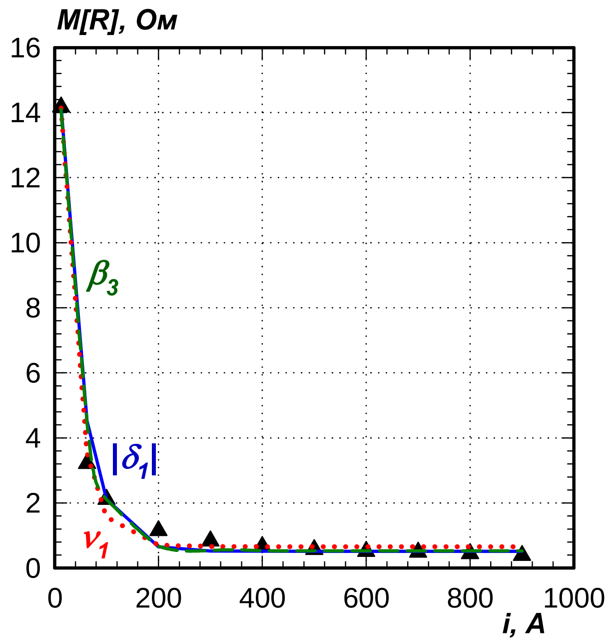

Рис. 1

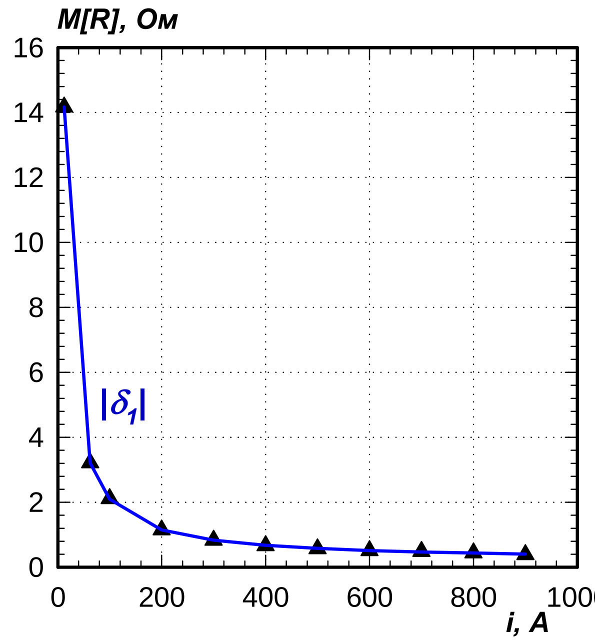

Рис. 2

Отримані за критеріями мінімуму (2), (3), (5) та (8) значення коефіцієнтів (10) та відповідні значення параметрів нев'язки апроксимацій (2), (3), (5), (6), (8) для функції (10) наведено в табл. 2. Знаходження значень коефіцієнтів (10) відбувалось за описаною вище для функції (9) методикою.

Аналіз даних, наведених у табл. 2, повністю підтверджує результати аналізу даних табл. 1, однак є певні доповнення. Функція (10) набагато краще апроксимує дискретну залежність $M[R]_e(i)$ (рис. 2), ніж функція (9) (рис. 1). Найменше значення середнього значення модулів відносних похибок апроксимації $|\delta_1|$ функцією (10) складає лише 1,278 % (табл. 2) у порівнянні з 18,92 % функцією (9) (табл. 1). Такі малі значення параметрів нев'язки апроксимації функцією (10) внаслідок більш адекватного відображення нею особливостей фізичних процесів призводять до того, що значення коефіцієнтів у (10), знайдені за різними критеріями, майже не відрізняються. Тому на рис. 2 разом з даними дискретної залежності $M[R]_e(i)$ суцільною лінією наведено лише один варіант функції (10), за якого її коефіцієнти знайдено за критерієм мінімуму $|\delta_1|$ (3). Надлишковість використання критеріїв мінімуму об'єднаних параметрів при пошуку оптимальних значень коефіцієнтів апроксимуючої функції (10) більш очевидна (табл. 2).

Таблиця 1

Критерії пошуку	**Значення коефіцієнтів**			**Значення параметрів нев'язки апроксимацій**				
	a₀, Ом	*a₁, Ом*	*a₂, А*	$\|\delta_1\|$, %	δ, %	υ_1, %	β_2, %	β_3, %
min $\|\delta_1\|$	0,51198	18,55810	40,79108	18,92095	1,54640	5,92736	12,42416	8,79824
min υ_1	0,65494	19,83601	32,39273	26,78103	-10,86755	3,69113	15,23608	13,77990
min β_2	0,51198	18,55810	40,79108	18,92095	1,54640	5,92737	12,42416	8,79824
min β_3	0,52522	18,45134	40,69084	19,37030	7,578E-08	5,82023	12,59526	8,39684

Таблиця 2

Критерії пошуку	**Значення коефіцієнтів**			**Значення параметрів нев'язки апроксимацій**				
	a_0, Ом	*a_1, В*	*a_2, Ом*	$\|\delta_1\|$, %	δ, %	υ_1, %	β_2, %	β_3, %
min $\|\delta_1\|$	0,19246	192,75228	153,58575	1,27797	-0,14254	0,14226	0,71012	0,52092
min υ_1	0,18984	193,62000	147,39497	1,30852	-0,05219	0,13645	0,72248	0,49905
min β_2	0,19246	192,75228	153,58575	1,27797	-0,14254	0,14226	0,71012	0,52092
min β_3	0,19136	192,76910	153,58531	1,29182	7,975E-06	0,14333	0,71758	0,47839

Висновки та узагальнення. 1. Запропоновано універсальні параметри нев'язки апроксимацій аналітичними функціями дискретно заданих залежностей за виразами (2), (3), (5) і (8). Параметри υ_1, $|\delta_1|$, β_2 та β_3 є безрозмірними. Вони не залежать від діапазонів змін значень функцій та від кількості точок дискретно заданої залежності і можуть бути придатні для порівняння якості апроксимацій будь-яких залежностей будь-якими функціями.

2. Використання в якості критеріїв пошуку оптимальних значень коефіцієнтів апроксимуючих функцій мінімальних значень об'єднаних параметрів β_2 та β_3 здатне підвищити якість апроксимації в усьому діапазоні змін значень функції та мінімізувати систематичну адитивну похибку апроксимації у порівнянні з використанням простих однокомпонентних критеріїв пошуку.

3. На значення параметрів нев'язки апроксимації більший вплив має здатність апроксимуючої функції адекватно описувати дискретно задану залежність в усьому діапазоні змін її значень, ніж використання більш досконалих критеріїв пошуку оптимальних значень коефіцієнтів апроксимуючої функції.

4. Якщо апроксимуюча функція з високою точністю описує дискретно задану залежність в усьому діапазоні змін її значень, оптимальні значення коефіцієнтів цієї функції, знайдені за різними критеріями пошуку, мало відрізняються. У цьому випадку використання складних критеріїв пошуку оптимальних значень коефіцієнтів за мінімальними значеннями об'єднаних параметрів може виявитись надлишковим.

5. За усіма розглянутими тут універсальними параметрами нев'язки функція, що має у своєму складі степеневу з показником –1, краще апроксимує дискретно задану залежність математичного сподівання еквівалентного електричного опору шару гранул алюмінію під час їхнього іскроерозійного диспергування у воді від миттєвих значень розрядного струму, ніж функція, що містить експоненціальну складову.

Роботу виконано частково за рахунок бюджетної теми «Розроблення теорії та принципів побудови енергоефективних перетворювальних пристроїв стабілізації та регулювання параметрів електромагнітної енергії для систем живлення сучасних електротехнологічних комплексів» (шифр «Сигма-Ш4»). Державний реєстраційний номер 0117U000291, КПКВК 6541030.

1. Захарченко С.Н. Моделирование зависимости электрического сопротивления гранулированных токопроводящих сред от протекающего в них импульсного тока**.** *Технічна електродинаміка*. 2012. № 5. С. 17–27.
2. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. 354 с.
3. Виноградов В.Н., Гай Е.В., Работнов Н.С. Аналитическая аппроксимация данных в ядерной и нейтронной физике. М.: Энергоатомиздат, 1987. 128 с.
4. Метод наименьших квадратов. URL: https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=Метод_наименьших_квадратов&stable=1. (дата доступу: 12.07.2021).
5. Ціделко В.Д., Яремчук Н.А. Невизначеність вимірювання. Обробка даних і подання результату вимірювання. К.: Політехніка, 2002. 176 с.
6. Шидловская Н.А., Захарченко С.Н., Черкасский А.П. Нелинейно-параметрическая модель электрического сопротивления гранулированных токопроводящих сред для широкого диапазона изменений приложенного напряжения. *Технічна електродинаміка*. 2014. № 6. С. 3–17.
7. Михеева Е.Н., Сероштан М.В. Управление качеством. М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и Ко», 2009. 708 с.
8. Berkowitz A.E., Hansen M.F., Parker F.T., Vecchio K.S., Spada F.E., Lavernia E.J., Rodriguez R. Amorphous soft magnetic particles produced by spark erosion. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials.* 2003. Vol. 254–255. Pp. 1–6. DOI: https://doi.org/10.1016/S0304-8853(02)00932-0
9. Шидловська Н.А., Захарченко С.М. Дискретна нелінійно-імовірнісна модель еквівалентного електричного опору шару металевих гранул. *Технічна електродинаміка*. 2021. № 2. С. 3–12. DOI: https://doi.org/10.15407/techned2021.02.003
10. Асанов У.А., Цой А.Д., Щерба А.А., Казекин В.И. Электроэрозионная технология соединений и порошков металлов. Фрунзе: Илим, 1990. 256 с.
11. Perekos A.E., Chernenko V.A., Bunayev S.A., Zalutskiy V.P., Ruzhitskaya T.V., Boitsov O.F., Kakazei G.N. Structure and Magnetic Properties of Highly Dispersed Ni-Mn-Ga Powders Prepared by Spark-Erosion. *Journal of Applied Physics*. 2012. Vol. 112. Pp. 093909-1 – 093909-7. DOI: https://dx.doi.org/10.1063/1.4764017
12. Monastyrsky G. Nanoparticles formation mechanisms through the spark erosion of alloys in cryogenic liquids. *Nanoscale Research Letters*. 2015. Vol. 10: 503. Pp. 1–8. DOI: https://doi.org/10.1186/s11671-015-1212-9
13. Harrington T., McElfresh C., Vecchio K.S. Spark erosion as a high-throughput method for producing bimodal nanostructured 316L stainless steel powder. *Powder Technology.* 2018. Vol. 328. Pp. 156–166. DOI: https://doi.org/10.1016/j.powtec.2018.01.012
14. Liu Y., Zhu K., Li X., Lin F., Li Y. Analysis of multi-scale *Ni* particles generated by ultrasonic aided electrical discharge erosion in pure water. *Advanced Powder Technology*. 2018. Vol. 29. Issue 4. Pp. 863–873. DOI: https://doi.org/10.1016/j.apt.2018.01.003
15. Monastyrsky G.E., Yakovenko P.A., Kolomytsev V.I., Koval Yu.N., Shcherba A.A., Portier R. Characterization of spark-eroded shape memory alloy powders obtained in cryogenic liquids. *Materials Science and Engineering: A*. 2008. Vol. 481–482. Pp. 643–646. DOI: https://doi.org/10.1016/j.msea.2006.12.213
16. Гончарук В.В., Щерба А.А., Захарченко С.Н., Савлук О.С., Потапченко Н.Г., Косинова В.Н. Дезинфицирующее действие объёмного электроискрового разряда в воде. *Химия и технология воды*. 1999. Т. 21. № 3. С. 328–336.
17. Петриченко С.В., Цолин П.Л., Ющишина А.Н. Электроискровая очистка гальваностоков от ионов тяжелых металлов в проточном реакторе. *Электронная обработка материалов*. 2020. Т. 56, № 5. С. 109–114. DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.4045711.
18. Danilenko N.B., Savel'ev G.G., Yavorovskii N.A., Khaskel'berg M.B., Yurmazova T.A., Shamanskii V.V. Water purification to remove As(V) by electropulse treatment of an active metallic charge. *Russian Journal of Applied Chemistry*. 2005. Vol. 78. No 10. Pp. 1631–1635. DOI: https://doi.org/10.1007/s11167-005-0575-6
19. Щерба А.А., Захарченко С.Н., Лопатько К.Г., Афтандилянц Е.Г. Применение объемного электроискрового диспергирования для получения седиментационно устойчивых гидрозолей биологически активных металлов. *Праці Інституту електродинаміки НАН України*. 2009. Вып. 22. С. 74–79.
20. *Лопатько К.Г., Мельничук М.Д.* Фізика, синтез та біологічна функціональність нанорозмірних об'єктів. К.: Видавничий центр НУБіП України, 2013. 297 с.

21. *Борисевич В.Б., Каплуненко В.Г., Косинов Н.В., Борисевич Б.В.* Наноматериалы и нанотехнологии в ветеринарной практике. К.: ВД «Авіцена», 2012. 512 с.
22. Шидловська Н.А., Захарченко С.М., Черкаський О.П. Фізичні передумови побудови математичних моделей електричного опору плазмоерозійних навантажень. *Технічна електродинаміка*. 2017. № 2. С. 5–12. DOI: https://doi.org/10.15407/techned2017.02.005
23. Шидловская Н.А., Захарченко С.Н., Черкасский А.П. Анализ электромагнитных процессов в выходной цепи генератора разрядных импульсов с нелинейной моделью плазмоэрозионной нагрузки при изменении их параметров в широких диапазонах. *Технічна електродинаміка*. 2016. № 1. С. 87–95. DOI: https://doi.org/10.15407/techned2016.01.087
24. Шидловский А.К., Щерба А.А., Супруновская Н.И. Энергетические процессы в электроимпульсных установках с емкостными накопителями энергии. К.: Интерконтиненталь-Украина, 2009. 208 с.
25. Ivashchenko D.S., Shcherba A.A., Suprunovska N.I. Analyzing Probabilistic Properties of Electrical Characteristics in the Circuits Containing Stochastic Load. Proc. IEEE International Conference on *Intelligent Energy and Power Systems IEPS-2016*. Kyiv, Ukraine, June 7–11, 2016. Pp. 45–48. DOI: https://doi.org/10.1109/IEPS.2016.7521887
26. Шидловська Н.А., Захарченко С.М., Черкаський О.П. Параметрична модель опору плазмоерозійного навантаження, адекватна в широкому діапазоні змін прикладеної напруги. *Технічна електродинаміка*. 2017. № 3. С. 3–12. DOI: https://doi.org/10.15407/techned2017.03.003
27. Подольцев А.Д., Супруновская Н.И. Моделирование и анализ электроразрядных процессов в нелинейной RLC цепи. *Технічна електродинаміка. Тематичний випуск Проблеми сучасної електротехніки*. 2006. Ч.4. С. 3–8.

DISCREPANCY PARAMETERS OF APPROXIMATIONS OF DISCRETELY SPECIFIED DEPENDENCIES BY ANALYTICAL FUNCTIONS AND SEARCH CRITERIA FOR OPTIMAL VALUES OF THEIR COEFFICIENTS

N.A. Shydlovska, S.M. Zakharchenko, I.L. Mazurenko
Institute of Electrodynamics of the National Academy of Sciences of Ukraine,
pr. Peremohy, 56, Kyiv, 03057, Ukraine
e-mail: snzakhar@ukr.net

Universal discrepancy parameters of approximations of discretely specified dependencies by analytical functions and search criteria for optimal values of their coefficients, as well as analysis of features of their application are described. Discrepancy parameters of approximations, which do not depend on the ranges of variation of the values of functions and the number of points of a discretely specified dependence, are proposed. They can be effective for objectively comparing the quality of approximations of any dependencies by any functions. Approximations of a discretely specified dependence of the mathematical expectation of the equivalent electrical resistance of a layer of aluminum granules during spark-erosion dispersion in water on the instantaneous values of the discharge current are carried out. As approximating functions, we chose a power function with an exponent factor –1 and a function based on exponential. Using the criteria of the least approximation error, the optimal values of the coefficients of both approximating functions are founded. It is shown in which cases it is advisable to use the combined search criteria for the optimal values of the coefficients of the approximating functions, and in which are enough simple one-component ones. Ref. 27, fig. 2, tables 2.
Keywords: electrical resistance, discharge current, spark-erosion dispersion, approximation, discrepancy, search criteria.

1. Zakharchenko S.N. Modelling of Dependence of Electrical Resistance of Granulated Current-carrying Mediums from a Pulse Current Proceeding in them. *Tekhnichna Elektrodynamika*. 2012. No 5. Pp. 17–27. (Rus)
2. Linnik Yu.V. The least squares method and the foundations of the mathematical and statistical theory of observation processing. Moscow: State publishing house of physical and mathematical literature, 1962. 354 p. (Rus)
3. Vinogradov V.N., Gai E.V., Rabotnov N.S. Analytical data approximation in nuclear and neutron physics. Moscow: Energoatomizdat, 1987. 128 p. (Rus)
4. Least Squares Method. URL: https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=Metod_naimen'shih_kvadratov&stable=1. (accesstd: 12.07.2021. (Rus)
5. Tsidelko V.D., Yaremchuk N.A. Measurement uncertainty. Data processing and presentation of the measurement result. Kyiv: Politekhnika, 2002. 176 p. (Ukr).
6. Shydlovskaya N.A., Zakharchenko S.N., Cherkasskyi A.P. Nonlinear-parametrical Model of Electrical Resistance of Current-Carrying Granulated Mediums for a Wide Range of Applied Voltage. *Tekhnichna Elektrodynamika*. 2014. No 6. Pp. 3–17. (Rus)
7. Mikheeva E.N., Seroshtan M.V. Quality management. Moskva: publishing-trading corporation «Dashkov & Co», 2009. 708 p. (Rus.)
8. Berkowitz A.E., Hansen M.F., Parker F.T., Vecchio K.S., Spada F.E., Lavernia E.J., Rodriguez R. Amorphous soft magnetic particles produced by spark erosion. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials.* 2003. Vol. 254–255. Pp. 1–6. DOI: https://doi.org/10.1016/S0304-8853(02)00932-0

9. Shydlovska N.A., Zakharchenko S.M. Discrete Nonlinear-Probabilistic Model of the Equivalent Electrical Resistance of a Layer of Metal Granules. *Tekhnichna Elektrodynamika*. 2021. No 2. Pp. 3–12. (Ukr). DOI: https://doi.org/10.15407/techned2021.02.003
10. Asanov U.A., Tsoj A.D., Shcherba A.A., Kazekin V.I. Electroerosive technology of interconnections and powders of metals. Frunze: Ilym, 1990. 256 p. (Rus.)
11. Perekos A.E., Chernenko V.A., Bunayev S.A., Zalutskiy V.P., Ruzhitskaya T.V., Boitsov O.F., Kakazei G.N. Structure and Magnetic Properties of Highly Dispersed Ni-Mn-Ga Powders Prepared by Spark-Erosion. *Journal of Applied Physics*. 2012. Vol. 112. Pp. 093909-1 – 093909-7. DOI: https://dx.doi.org/10.1063/1.4764017
12. Monastyrsky G. Nanoparticles formation mechanisms through the spark erosion of alloys in cryogenic liquids. *Nanoscale Research Letters*. 2015. Vol. 10: 503. Pp. 1–8. DOI: https://doi.org/10.1186/s11671-015-1212-9
13. Harrington T., McElfresh C., Vecchio K.S. Spark erosion as a high-throughput method for producing bimodal nanostructured 316L stainless steel powder. *Powder Technology.* 2018. Vol. 328. Pp. 156–166. DOI: https://doi.org/10.1016/j.powtec.2018.01.012
14. Liu Y., Zhu K., Li X., Lin F., Li Y. Analysis of multi-scale *Ni* particles generated by ultrasonic aided electrical discharge erosion in pure water. *Advanced Powder Technology*. 2018. Vol. 29. Issue 4. Pp. 863–873. DOI: https://doi.org/10.1016/j.apt.2018.01.003
15. Monastyrsky G.E., Yakovenko P.A., Kolomytsev V.I., Koval Yu.N., Shcherba A.A., Portier R. Characterization of spark-eroded shape memory alloy powders obtained in cryogenic liquids. *Materials Science and Engineering: A*. 2008. Vol. 481–482. Pp. 643–646. DOI: https://doi.org/10.1016/j.msea.2006.12.213
16. Goncharuk V.V., Shcherba A.A., Zakharchenko S.N., Savluk O.S., Potapchenko N.G., Kosinova V.N. Disinfectant action of the volume electrospark discharges in water. *Khimiia i tehnologiia vody*. 1999. Vol. 21. No 3. Pp. 328–336. (Rus)
17. Petrichenko S.V., Tsolin P.L., Yushchishina A.N. Electric-spark cleaning of electroplating drains from heavy metal ions in a flow reactor. *Elektronnaya obrabotka materialov*. 2020.Vol. 56, No 5. Pp. 109–114. DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.4045711
18. Danilenko N.B., Savel'ev G.G., Yavorovskii N.A., Khaskel'berg M.B., Yurmazova T.A., Shamanskii V.V. Water purification to remove As(V) by electropulse treatment of an active metallic charge. *Russian Journal of Applied Chemistry*. 2005. Vol. 78. No 10. Pp. 1631–1635. DOI: https://doi.org/10.1007/s11167-005-0575-6
19. Shcherba A.A., Zakharchenko S.N., Lopatko K.G., Aftandilyants E.G. Application of volume electric spark dispersion for production steady to sedimentation hydrosols of biological active metals. *Pratsi Instytutu Elektrodynamiky Natsionalnoi Akademii Nauk Ukrainy*. 2009. Issue 22. Pp. 74–79. (Rus)
20. Lopatko K.G., Melnichuk M.D. Physics, synthesis and biological functionality of nanosize objects. Kyiv: Vidavnichij centr Natsionalnogo Universitetu Bioresursiv i Priridokoristuvannya Ukraini, 2013. 297 p. (Ukr)
21. Borisevich V.B., Kaplunenko V.G., Kosinov N.V., Borisevich B.V. Nanomaterials and nanotechnology in veterinary practice. Kyiv: Publishing House "Avitsena", 2012. 512 p.
22. Shydlovska N.A., Zakharchenko S.M., Cherkaskyi O.P. Physical Prerequisites of Construction of Mathematical Models of Electric Resistance of Plasma-erosive Loads. *Tekhnichna Electrodynamika*. 2017. No 2. Pp. 5–12. (Ukr) DOI: https://doi.org/10.15407/techned2017.02.005
23. Shydlovska N.A., Zakharchenko S.M., Cherkassky O.P. The Analysis of Electromagnetic Processes in Output Circuit of the Generator of Discharge Pulses with Non-linear Model of Plasma-erosive Load at Change Their Parameters in Wide Ranges. *Tekhnichna Elektrodynamika*. 2016. No 1. Pp. 87–95. (Rus) DOI: https://doi.org/10.15407/techned2016.01.087
24. Shydlovskyi A.K., Shcherba A.A., Suprunovska N.I. Power Processes in Electrical Pulse Devices with Capacitive Energy Storages. Kyiv: Interkontinental-Ukraina, 2009. 208 p. (Rus)
25. Ivashchenko D.S., Shcherba A.A., Suprunovska N.I. Analyzing Probabilistic Properties of Electrical Characteristics in the Circuits Containing Stochastic Load. Proc. IEEE International Conference on *Intelligent Energy and Power Systems IEPS-2016*. Kyiv, Ukraine, June 7–11, 2016. Pp. 45–48. DOI: https://doi.org/10.1109/IEPS.2016.7521887
26. Shydlovska N.A., Zakharchenko S.M., Cherkaskyi O.P. Parametric Model of Resistance of Plasma-erosive Load, Adequate in the Wide Range of Change of Applied Voltage. *Tekhnichna Elektrodynamika*. 2017. No 3. Pp. 3–12. (Ukr) DOI: https://doi.org/10.15407/techned2017.03.003
27. Podoltsev A.D., Suprunovskaya N.I. Modelling and the analysis of electric discharge processes in nonlinear RLC-circuits. *Tekhnichna electrodynamica. Tematichnyi vypusk "Problemy suchasnoi elektrotekhniky"*. 2006. Vol. 4. P. 3–8. (Rus)

Надійшла: 14.07.2021
Received: 14.07.2021